O Desenvolvimento de conceitos ligados à área e ao perímetro: Uma exploração com bissemis

Sara Ribeiro, Pedro Palhares
CIEC, Instituto de Educação, Universidade do Minho
pg25542@alunos.uminho.pt, palhares@ie.uminho.pt

Número 4
Junho 2015
AEME ASSOCIAÇÃO PARA A EDUCAÇÃO MATEMÁTICA ELEMENTAR
Ludus

Vária

O Desenvolvimento de conceitos ligados à área e ao perímetro: Uma exploração com bissemis

Sara Ribeiro, Pedro Palhares
CIEC, Instituto de Educação, Universidade do Minho
pg25542@alunos.uminho.pt, palhares@ie.uminho.pt

Resumo: *Neste artigo apresentam-se algumas potencialidades educativas de um material inventado por Paulus Gerdes, os bissemis. A intervenção pedagógica, desenvolvida ao longo de três aulas, ocorreu numa turma do 4.° ano de escolaridade, no âmbito da Prática de Ensino Supervisionada, do Mestrado em ensino do 1.° e 2.° ciclo do Ensino Básico da Universidade do Minho. Esta incidiu sobre o domínio Medida, com enfoque para o desenvolvimento dos conceitos ligados à área e ao perímetro.*

Palavras-chave: bissemis; área; perímetro.

1 Introdução

Paulus Gerdes, nascido holandês mas tendo vivido a maior parte da sua vida em Moçambique, foi um prolífico autor matemático. Baseou quase toda a sua obra na etnomatemática, isto é, na matemática usada por grupos culturais determinados, no caso essencialmente africanos. Procurou refazer uma história da matemática muito centrada na visão do mundo ocidental moderno, argumentando e trazendo provas relativas a uma maior importância africana no desenvolvimento da Matemática. A sua análise de artefactos de todo o tipo, através do método de "descongelamento" do pensamento geométrico que esteve na base da sua construção [3], trouxe-lhe o respeito da comunidade etnomatemática a nível mundial. Menos conhecida é a sua faceta de invenção de materiais direcionados a crianças, tendo escrito vários livros, sobre os desenhos sona [4], sobre bisos [5], sobre bissemis [6]. Estes materiais ainda não foram devidamente aproveitados pela comunidade educativa mas têm muitas potencialidades. Neste artigo pretendemos mostrar algumas potencialidades de um destes materiais.

2 Bissemis

Os bissemis, da autoria de Paulus Gerdes, constituem o material que presidiu ao conjunto de atividades de natureza exploratória que aqui nos propomos descrever. A este propósito, [6] explica:

> Ao dissecar um dominó ao longo duma diagonal obtêm-se dois triângulos rectângulos, cujos catetos medem uma e duas unidades, respectivamente. Os triângulos assim obtidos constituem os elementos de base com os quais se pode construir figuras novas. Uma vez que esses triângulos são a metade dum dominó chamamo-los semidominós (semi=metade), ou simplesmente, semis. As figuras que se podem formar com dois semis chamaremos bissemis. (p. 9)

Em concordância com a descrição anterior, os bissemis utilizados nas atividades foram construídos pela justaposição dos lados de igual comprimento de dois triângulos retângulos congruentes cujos catetos medem 5 cm e 10 cm (Figura 1).

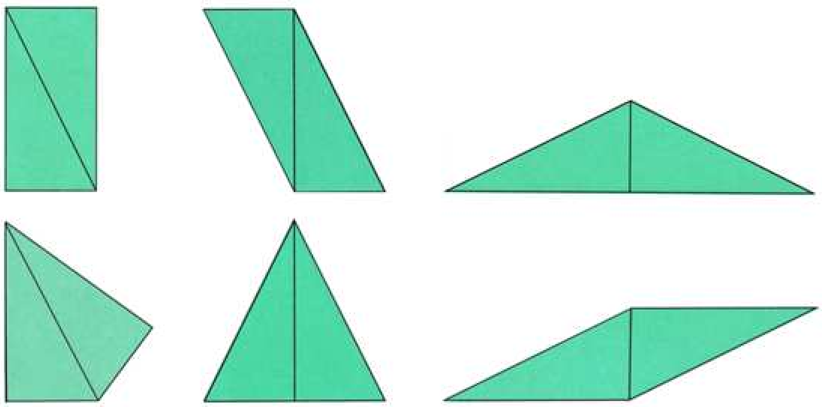

Figura 1: Bissemis construídos pela justaposição dos lados de igual comprimento de dois triângulos retângulos congruentes.

3 Atividades desenvolvidas

As atividades doravante descritas foram desenvolvidas numa turma do 4.° ano de escolaridade de uma escola básica do 1.° ciclo de Braga, no âmbito da Unidade Curricular Prática de Ensino Supervisionada, contemplada no plano de estudos do Mestrado em Ensino do 1.° e 2.° Ciclo do Ensino Básico da Universidade do Minho.

3.1 Intervenção 1 – A área dos bissemis

Esta intervenção tinha como objetivo essencial a comparação de áreas de figuras diferentes, tendo por base a construção dos bissemis.

Distribuiu-se aos alunos, organizados em grupos, a parte I da "Ficha de trabalho– Comparação de áreas de figuras diferentes" e o respetivo material (triângulos retângulos congruentes cujo cateto maior é o dobro do cateto menor). Esta ficha era composta por três tarefas matemáticas: na primeira, os alunos deviam descobrir as diferentes figuras que é possível construir justapondo os lados de igual comprimento de dois dos triângulos distribuídos; na segunda, os alunos deviam reproduzir as figuras em papel ponteado e identificá-las; e na terceira, os alunos deviam comparar a área das figuras, posteriormente designadas bissemis.

Logo numa fase inicial da exploração, os grupos demonstraram dificuldades na interpretação da expressão "justapondo os lados de igual comprimento", o que obstaculizou a construção das diferentes figuras. Em decurso, realizou-se um esclarecimento em plenário, que favoreceu a descoberta das figuras.

No final, todos os grupos conseguiram construir as seis figuras possíveis (Figura 2), realizando a tarefa 1 com sucesso. Estes grupos, quando questionados acerca da existência (ou não) de mais figuras para além daquelas, foram capazes de reconhecer que não. Todavia, nenhum aluno conseguiu apontar uma razão para justificar este facto. Na tarefa 2, os alunos demonstraram dificuldades tanto na reprodução, como na identificação das figuras.

Figura 2: Construção dos bissemis pelos alunos.

A tarefa 3 proporcionou aos alunos um nível de desafio que os envolveu em discussões e argumentações contínuas no interior grupos, tendentes à promoção da comunicação matemática, no domínio oral (transcrições 1, 2, 3, 4). Apesar da difícil gestão durante esta fase de atividade, procurou-se estimular constantemente a reflexão dos alunos.

CF: Para um triângulo, como é que nós descobrimos a área?
Professora: Se calhar não é preciso calcular.
CF: Mas então como é que nós vamos fazer?
Professora: Têm que pensar noutra maneira.
(tempo depois)

CF: Nós já sabemos a resposta, só que não sabemos explicar.
Professora: Então, qual é a resposta?
CF: Nós achamos que sim por causa que alguns triângulos (refere-se aos triângulos utilizados para construir as figuras) *são maiores do que os outros e outros são mais pequenos.*
Professora: Então, separem-me os triângulos maiores dos mais pequenos.
(ficam confusos a separar)
FV: Não dá.
CR: É que se nós unirmos assim (coloca os triângulos todos uns em cima dos outros), *reparamos que a área deles é igual. Mas só que quando fazemos as figuras, pensamos que não.*
CF: Mas eu também ao mesmo tempo acho que são todas iguais por causa que em todas só usamos dois triângulos.
Transcrição 1–Discussão realizada num grupo (CF, CR, FV, GP) na exploração da tarefa 3.

RM: Eu estou a ver por aqui por estas
(aponta para as figuras que desenhou na tarefa).
Professora: Não podes ver por essas, têm que usar as figuras construídas com o material.
RM: Mas assim como é que nós vamos fazer quadradinhos?
Professora: Que quadradinhos?
RM: Porque nós antes, para saber a área, tinha quadradinhos um triângulo e nós contávamos. E dizia assim, um quadradinho é um centímetro quadrado...
(interrompi a aluna).
Professora: E será que é preciso desenhar quadradinhos para ver se têm a mesma área?
RM: Como é que nós sabemos? É para fazer aproximadamente?
IM: Eu acho que têm todas o mesmo porque os triângulos são todos iguais.
RM: Acho que não. Os lados, alguns são mais pequenos do que outros e por isso as figuras ficam com menos área quando estão assim (refere-se às figuras em que os catetos menores não são justapostos). *Este lado aqui* (aponta para um dos lados do triângulo formado pela justaposição dos catetos menores de dois triângulos) *fica maior, fica com mais quadradinhos e mais centímetros quadrados.*
Transcrição 2–Discussão realizada num grupo (BS, EG, IM, RM) na exploração da tarefa 3.

DF: Nós pusemos: Sim, porque todas as figuras que se faz utiliza-se dois triângulos pequenos (lê a resposta).
Professora: E o que é que isso quer dizer? Explica-me lá.
DF: Quer dizer que cada figura geométrica que nós construímos tem a mesma área.
Professora: Porquê?
DA: Porque são dois triângulos iguais.
Professora: Então quer dizer que se eu encostasse estes dois triângulos e fizesse uma figura qualquer, ela ia ter sempre a mesma área?
DF: Não, isso também não.
Professora: Então encontra-me uma que não tenha.
IF: Sim, é sim.
Transcrição 3–Discussão realizada num grupo (DA, DF, IF) na exploração da tarefa 3.

MS: Já construímos todas as figuras.
DS: Acho que a que tem maior área é esta (aponta para o triângulo formado pela justaposição dos catetos menores de dois triângulos).
Professora: Porquê? DS: Por causa que acho que essa é a maior figura de sempre, de todas.
Professora: E agora se eu fizer assim (movimento os triângulos, justapondo agora os catetos maiores dos dois triângulos), *a área é a mesma da outra figura ou é diferente?*
DS: É diferente. Não, igual. (fica indeciso). *Ora põe outra vez.*
MS: Para mim é igual, porque se nós trocarmos este por este vai dar a mesma coisa. Mesmo que esteja diferente é a mesma coisa.
Transcrição 4–Discussão realizada num grupo (DS, LM, MS) na exploração da tarefa 3.

Na generalidade, não foi intuitivo para nenhum dos grupos que a área das figuras permanecia inalterada, independentemente dos lados dos triângulos justapostos. As transcrições 1, 2, 3 e 4 ilustram essa dificuldade, associada à noção de conservação de área.

Os grupos não conceberam, de imediato, que podiam comparar a área das figuras, mobilizando um raciocínio baseado na decomposição das mesmas em dois triângulos congruentes–*nonmeasurement reasoning* ([1], p. 903). Alguns grupos insistiram, inicialmente, na utilização de fórmulas e procedimentos numéricos, que o currículo escolar tão prematuramente privilegia–*measurement reasoning* ([1], p. 903). E certos grupos basearam o seu raciocínio, primordialmente, na aparência das figuras, realizando descrições meramente visuais na comparação da área destas, alicerçadas em estratégias imprecisas.

Neste âmbito, a manipulação do material concreto pelos alunos constituiu-se essencial, uma vez que os impeliu a refletirem acerca das suas conceptualizações e a elaborarem novas estratégias de raciocínio. Com efeito, os alunos formularam novas conjeturas sobre a área das figuras, resultantes de inferências baseadas na comparação direta (sobreposição) dos dois triângulos congruentes em que estas se decompõem. Portanto, na tarefa 3, os grupos deduziram a conservação da área dos bissemis com base na equivalência dos dois triângulos em que estes se podem decompor (Figuras 3, 4 e 5). Atente-se na figura 5, em que o aluno explica a congruência dos triângulos, subdividindo-os num número igual de unidades de área.

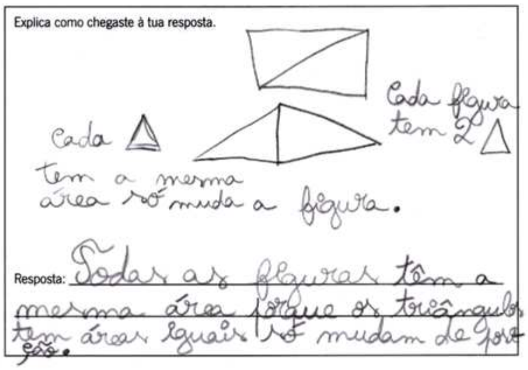

Figura 3: Resolução de um aluno (RM) na tarefa 3.

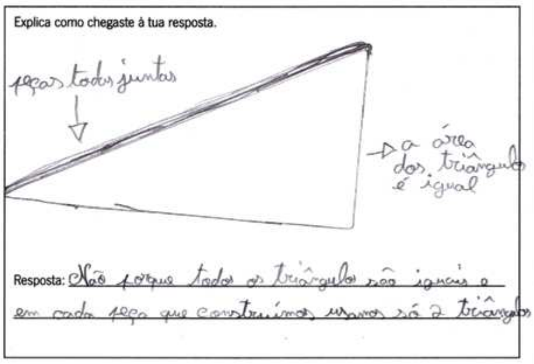

Figura 4: Resolução de um aluno (CF) na tarefa 3.

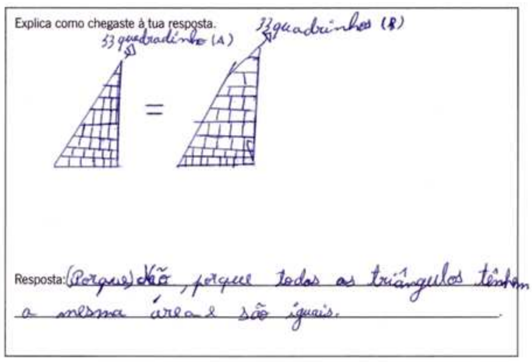

Figura 5: Resolução de um aluno (RP) na tarefa 3.

No final, promoveu-se um momento de discussão/reflexão acerca da parte I da ficha. Para isso, diferentes alunos desenharam, no quadro de giz, uma das seis figuras construídas com os dois triângulos, colando, junto ao seu desenho, a respetiva figura feita em cartolina (Figura 6). Isto porque os desenhos apresentavam várias fragilidades. Veja-se, a este propósito, que o triângulo obtido pela justaposição dos catetos menores dos triângulos não é isósceles; os paralelogramos não apresentam dois pares de lados opostos paralelos; e os alunos desconsideram a existência de comprimentos iguais entre as diferentes figuras. Neste momento, introduziu-se a designação das seis figuras–bissemis.

Figura 6: Apresentação dos bissemis pelos alunos no quadro de giz.

Posteriormente, os diferentes grupos grupos partilharam oralmente as conclusões relativas à área dos bissemis. Aqui, os alunos limitaram-se à leitura das produções escritas na tarefa 3, revelando dificuldades em explicar as suas ideias e raciocínios. Embora diferentes, as respostas confluíram na ideia de que, sendo a área de cada um dos triângulos igual, qualquer bissemi, ao ser formado por dois destes triângulos, teria a mesma área.

Após este momento, distribuiu-se aos alunos a parte II da "Ficha de trabalho - Comparação de áreas de figuras diferentes" e o respetivo material (bissemis). Nesta, os alunos deviam construir uma figura, justapondo os lados de igual comprimento de um número de bissemis à sua escolha e, a seguir, colá-la numa folha, atribuindo-lhe um título.

Denotou-se um envolvimento espontâneo dos mesmos nesta tarefa, que não gerou quaisquer dúvidas. No final, foram recolhidas as folhas com as construções dos alunos e coladas no quadro de giz (Figura 7).

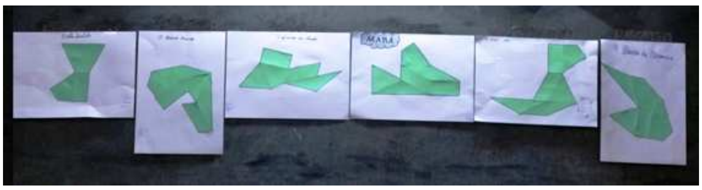

Figura 7: Figuras construídas com os bissemis pelos grupos.

A partir destas, promoveu-se um momento de discussão/reflexão acerca da área das figuras. Neste, os alunos, baseados na observação e desconhecendo o número de bissemis utilizado pelos restantes grupos, compararam a área das figuras, expondo oralmente as suas ideias. Eles foram congruentes ao identificarem duas figuras com menor área do que as restantes: "Eu acho que todas têm a mesma área a não ser a primeira e o pássaro com chapéu (refere-se à terceira)" (CF). E, justificaram as suas opiniões com base no número de bissemis utilizado na sua construção: "Porque eu contei aquelas coisinhas (refere-se aos bissemis) e acho que ali tem quatro (refere-se à primeira) e ali contei cinco (refere-se à terceira)" (MP). Para terminar, cada um dos grupos revelou o número de bissemis presente na sua figura, o qual foi confrontado com as previsões dos alunos, que se revelaram corretas.

3.2 Intervenção 2 – Medição direta da área de puzzles construídos com bissemis

A segunda intervenção objetivava, essencialmente, a medição direta da área de figuras, utilizando unidades de área não convencionais. Foi privilegiada a continuidade na utilização do material manipulável da aula anterior.

Distribuiu-se aos alunos, organizados em grupos, a "Ficha de trabalho–Medição de áreas de figuras, utilizando unidades não convencionais" e o respetivo material (triângulos retângulos congruentes cujo cateto maior é o dobro do cateto menor; bissemis; quadrados equivalentes aos triângulos; puzzles). Esta era composta por sete tarefas matemáticas: nas seis primeiras, os alunos deviam preencher três puzzles com os modelos concretos indicados (triângulos, bissemis, quadrados) e determinar a sua área, fixada uma destas unidades de medida; na sétima, os alunos deviam identificar as regularidades existentes na área dos três puzzles utilizando cada uma das unidades de medida e formular conclusões.

Uma fragilidade demonstrada por determinados grupos foi o facto de não compreenderem como é que a contagem de unidades utilizadas para cobrir uma figura produz a medida de área da mesma. Efetivamente, na tarefa 1, depois de preencherem o puzzle 1 com os triângulos, os grupos comprovaram que eram necessários dez triângulos para o cobrir. No entanto, nem todos associaram este valor à medida da área do puzzle (transcrição 5).

De acordo com Battista [1], "many students do not properly maintain the connection between numerical measurements and the process of unit-measure iteration." (p. 892). De facto, a transcrição 5 sugere que os alunos não associam a medida de área do puzzle ao processo de repetição da unidade de área, o triângulo. No entendimento de Outhred e Mitchelmore [9], a fragilidade demonstrada pelos alunos constitui uma razão pela qual as atividades de preenchimento de figuras com materiais concretos, no caso particular para a compreensão da área, podem constituir-se ineficazes: "children may not relate the concrete materials to the mathematical concepts they are supposed to represent." (p. 146).

Professora: Quantos triângulos é que usaram para construir este puzzle?
Grupo: Dez.
Professora: Agora, se o triângulo for a unidade de área, qual é a área deste

puzzle? (ficam em silêncio)
Professora: Então, se utilizaram dez triângulos para cobrir este puzzle, qual é a área dele, sabendo que cada triângulo vale uma unidade de área?
DS: É cem.
Professora: É cem porquê?
DS: Tinha de valer dez.
FV: Já sei. Vinte.
Transcrição 5–Discussão realizada num grupo (BS, DS, FV) na exploração da tarefa 1.

Uma outra fragilidade observada, esta transversal à totalidade dos grupos, ocorreu ao nível das unidades de área utilizadas para expressar a área dos puzzles. De facto, os grupos, mesmo apreendendo que para determinar a área do puzzle 1 tinham que contar as dez unidades de área (triângulos) utilizadas para o cobrir, expressaram a área deste puzzle sem qualquer unidade de área, ou com unidades de área do sistema métrico (transcrição 6), ou até mesmo com unidades de comprimento do sistema métrico (transcrição 7).

Esta fragilidade sugere-se até paradoxal: se, por um lado, os alunos revelaram compreender que a medição direta da área "se traduz numa comparação imediata entre a unidade e a grandeza a medir" ([2], pp. 133-134), por outro lado, demonstraram não estar cientes da unidade de medida utilizada "para exaurir o atributo" ([10], p. 378). E, ainda, alguns revelaram mesmo não compreender que a unidade tem que ser da mesma natureza do que o atributo. De acordo com o NCTM [8], "Compreender que são necessárias unidades distintas para medir atributos mensuráveis (grandezas) diferentes é, por vezes, difícil para os alunos mais novos. Aprender a selecionar a unidade apropriada constitui o cerne da compreensão da medição." (p. 49).

Professora: Então, se o triângulo for a unidade de área, qual é a área deste puzzle?
CF: (aponta para cada um dos triângulos utilizados, contando-os em silêncio) *É dez.*
Professora: Dez quê?
CF: Dez metros quadrados.
Professora: Metros quadrados? Afinal o que estamos a considerar como unidade de área?
CF: Dez triângulos.
RM: A área é em centímetros quadrados!
Professora: Mas também podemos utilizar outras unidades, não podemos?
CF: Por exemplo, naquela coisa "De que tamanho é o pé do rei", *naquilo da cama do aprendiz calculaste em pés. Então aqui é a mesma coisa, está a calcular em triângulos.*
Transcrição 6–Discussão realizada num grupo (CF, MS, RM, RP) na exploração da tarefa 1.

AM: Qual é a área do puzzle, utilizando como unidade de área o triângulo? (lê a pergunta)
Professora: Então se a unidade de área for um triângulo, se eu considerar esta (aponto para um dos triângulos) *a unidade de área...*
GP: Isso vale um!
Professora: E qual é a área deste puzzle?

GP: É dez.
Professora: Muito bem.
GP: Mas temos que por dez centímetros?
Transcrição 7–Discussão realizada num grupo (AM, DA, GP, MM) na exploração da tarefa 1.

As fragilidades anteriores tornaram-se menos frequentes à medida que os alunos progrediram na resolução da ficha.

A tarefa 6 constituiu-se, porém, mais exigente e desafiante para os alunos, uma vez que a unidade de medida utilizada não permitia preencher o puzzle 3 (Figura 8).

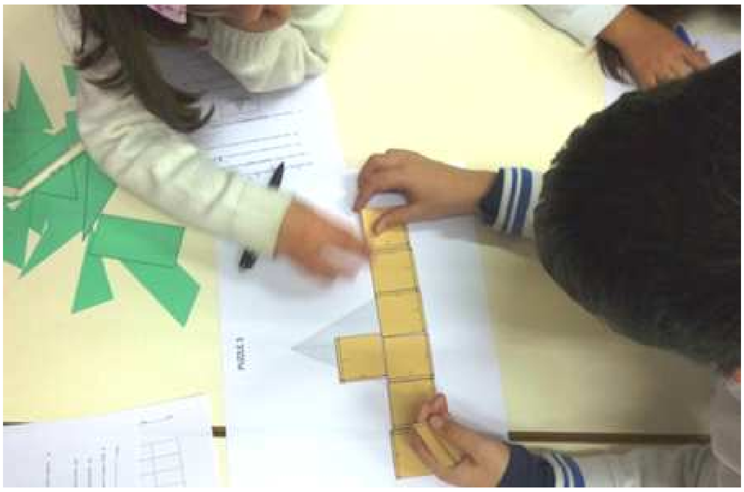

Figura 8: Tentativa de preenchimento do puzzle 3 com quadrados.

Apenas alguns grupos conjeturaram e comprovaram que o quadrado utilizado como unidade tinha a mesma área do que o triângulo, determinando a área do puzzle 3 corretamente. Alguns desses grupos chegaram a esta conclusão quando preencheram o retângulo presente no puzzle 3 com dois quadrados e perceberam que, sendo o retângulo formado por dois triângulos, cada triângulo tinha que ter a mesma área do que o quadrado. Outros grupos chegaram a uma conclusão confluente ao sobrepor o triângulo e o quadrado, verificando que a parte do triângulo que ficava “de fora”do quadrado correspondia à parte do quadrado que o triângulo "não preenchia”. Como vemos, a manipulação do material concreto constituiu-se fundamental para o estabelecimento da relação de equivalência entre o quadrado e o triângulo pelos grupos.

Na tarefa 7, todos os grupos conseguiram identificar as regularidades existentes na área dos três puzzles utilizando como unidades de área os triângulos e os bissemis, verificando que a área dos puzzles utilizando como unidade os triângulos era o dobro da área dos puzzles utilizando como unidade os bissemis. Relativamente às regularidades existentes na área dos três puzzles utilizando como unidade de área, também, os quadrados, somente os grupos que comprovaram que o quadrado era equivalente ao triângulo é que identificaram e justificaram esta regularidade.

Findo o tempo definido para a realização da ficha, promoveu-se um momento de discussão/reflexão em plenário acerca da mesma. Depois de colados os puzzles 1, 2 e 3 no quadro de giz, solicitou-se aos diferentes grupos que partilhassem e explicassem a área que determinaram para cada um dos puzzles, utilizando cada uma das unidades de medida.

Foi dada particular atenção à tarefa que implicava a utilização do quadrado como unidade de área, a qual não foi acessível a todos os alunos. Assim, solicitou-se aos grupos que a realizaram com sucesso que expusessem a sua resolução, incentivando-se os restantes a questionarem os seus pares sobre as ideias e conclusões apresentadas. A seguir, para concretizar a ideia de equivalência entre o quadrado e o triângulo, e tendo por base uma das explicações apresentadas, solicitou-se aos grupos que colocassem um triângulo em cima de um quadrado, marcassem a parte do quadrado que ficava "de fora" do triângulo, cortassem essa parte e verificassem, então, se o quadrado e o triângulo tinham (ou não) a mesma área. Foi curioso ver as reações de admiração dos alunos, mesmo até dos que tinham resolvido corretamente a tarefa. Uma vez compreendida a equivalência entre o triângulo e o quadrado, a discussão da tarefa 7 constituiu-se linear.

3.3 Intervenção 3 – A área e o perímetro dos bissemis

A terceira intervenção visava a distinção entre os conceitos de área e perímetro. Uma vez mais, foi privilegiada a continuidade na utilização dos bissemis.

Distribuiu-se aos alunos a "Ficha de trabalho - Área e Perímetro" e o respetivo material (bissemis). Esta era composta por quatro tarefas matemáticas: na primeira, os alunos deviam investigar os diferentes comprimentos nos bissemis; na segunda, os alunos deviam pintar, com cores iguais, os lados dos bissemis com o mesmo comprimento, reproduzidos em tamanho real na tarefa; na terceira, os alunos deviam investigar os bissemis isoperimétricos; e, na quarta[1], os alunos deviam comentar a existência de figuras com a mesma área e perímetros diferentes. Articulou-se, ainda, a tarefa 5, como complemento ao trabalho dos alunos que pudessem terminar antecipadamente as anteriores. Nesta, os alunos deviam desenhar, em papel quadriculado (unidade de comprimento–1 cm), figuras não geometricamente iguais a um dos bissemis à sua escolha, mas com igual perímetro.

Desde logo, a maioria dos alunos demonstrou dificuldades na interpretação da tarefa 1, revelando não compreender o que era pretendido e, até mesmo, mostrando não conseguir identificar uma estratégia de resolução concreta. Como consequência, os alunos demoraram bastante tempo a desenvolver a atividade de forma estruturada e com compreensão.

[1] Esta tarefa resulta da adaptação de uma questão que integra a Prova Final de Matemática do 1.º Ciclo do Ensino Básico de 2013 (1.ª Fase).

As respostas dos alunos na tarefa 1 denotaram a utilização de duas estratégias: na primeira, incluem-se os alunos que utilizaram a manipulação do material para justaporem os lados dos bissemis e determinarem aqueles que seriam congruentes (Figura 9); na segunda, incluem-se os alunos que utilizaram a régua para medirem os lados dos bissemis e determinarem aqueles que teriam a mesma medida (Figura 10).

Figura 9: Resolução efetuada por um aluno (AM) na exploração da tarefa 1.

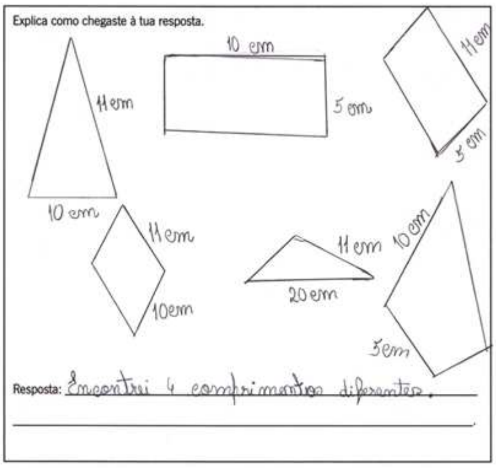

Figura 10: Resolução efetuada por um aluno (MM) na exploração da tarefa 1.

A segunda estratégia foi substancialmente mais usada. Portanto, os alunos, na comparação de comprimentos, privilegiaram a comparação indireta, assente na medição com régua, em detrimento da comparação direta, baseada na justaposição dos lados.

De salientar que nenhum dos alunos da turma se baseou nas propriedades geométricas dos bissemis, particularmente a congruência de lados, para fazer deduções relativas aos diferentes comprimentos existentes. E, os alunos revelaram mesmo não reconhecer, muitas vezes, estas propriedades no decurso da sua resolução. Por exemplo, aquando da medição ou da comparação direta de comprimentos, os alunos repetiram este procedimento para todos os lados dos bissemis. Outros exemplos são as fragilidades identificadas nas respostas dos alunos na tarefa 1, nomeadamente: os lados de um dos pares de lados consecutivos congruentes do papagaio não apresentarem a mesma medida (Figura 11); um dos pares de lados opostos paralelos do paralelogramo obtido pela justaposição dos catetos menores dos triângulos apresentar uma medida diferente de todos os outros comprimentos encontrados nos bissemis (Figura 12); os quatro lados do paralelogramo obtido pela justaposição dos catetos menores dos triângulos apresentarem a mesma medida (Figura 13); e o paralelogramo obtido pela justaposição dos catetos menores dos triângulos apresentar dois pares de lados consecutivos com a mesma medida (Figura 14). De notar que estas fragilidades ocorreram somente nas resoluções dos alunos que utilizaram a estratégia de medição.

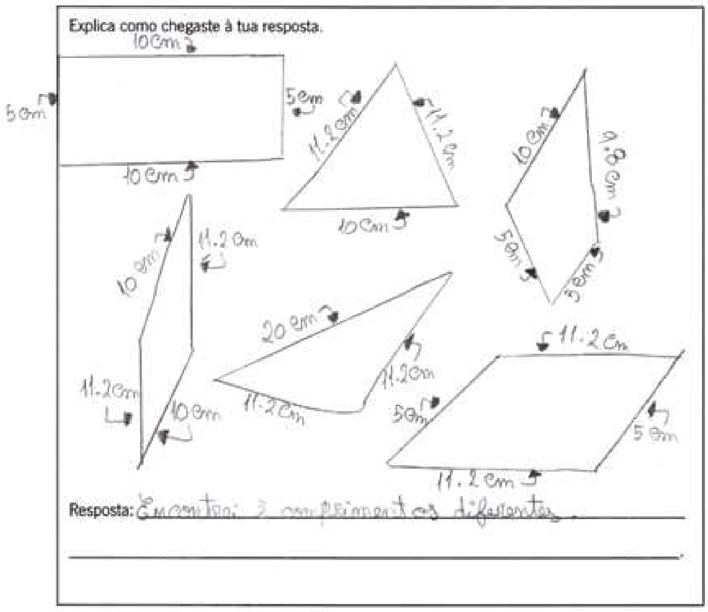

Figura 11: Resolução efetuada por um aluno (BB) na exploração da tarefa 1.

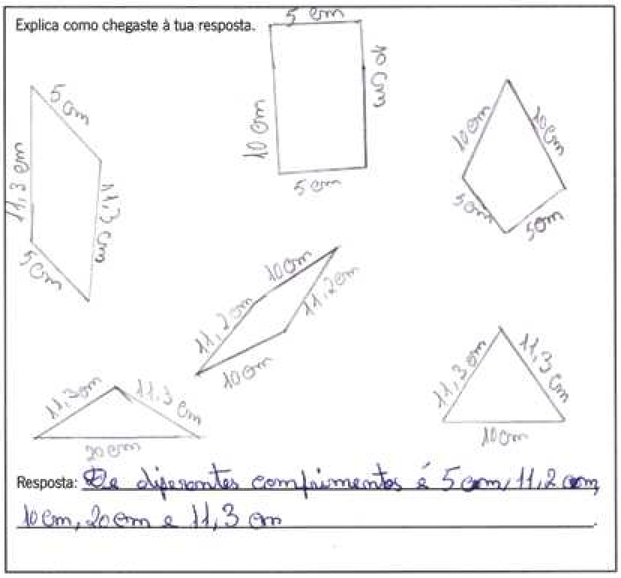

Figura 12: Resolução efetuada por um aluno (BS) na exploração da tarefa 1.

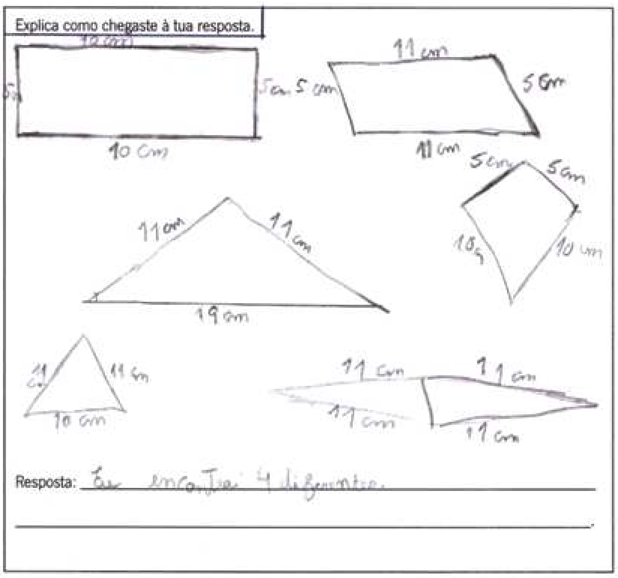

Figura 13: Resolução efetuada por um aluno (LM) na exploração da tarefa 1.

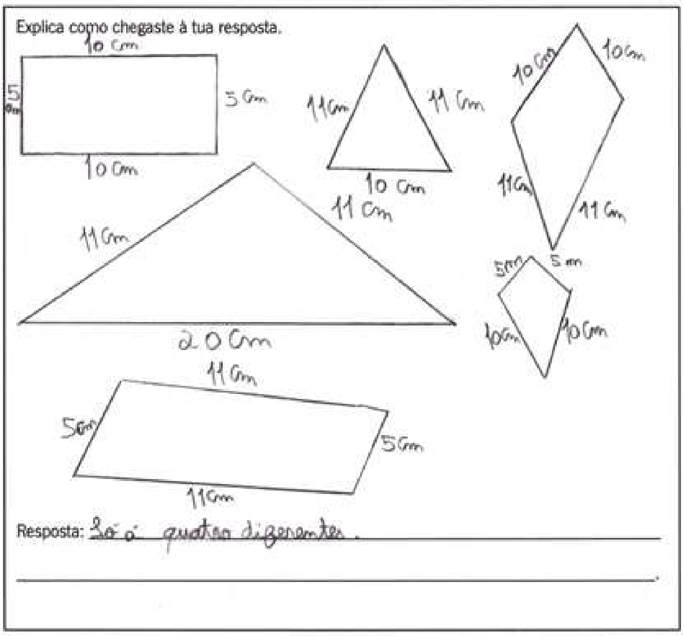

Figura 14: Resolução efetuada por um aluno (JR) na exploração da tarefa 1.

Ora, nas Figuras 11 e 12, as fragilidades decorreram de erros na leitura da escala da régua pelos alunos, os quais não convocaram os conhecimentos da congruência dos lados dos bissemis para repensarem os resultados, obtendo cinco comprimentos diferentes. Por sua vez, nas Figuras 13 e 14, as fragilidades surgiram do reconhecimento erróneo dos lados congruentes dos bissemis, que levou os alunos a atribuírem medidas iguais a estes lados, mesmo sem concretizarem a medição.

De uma forma geral, os alunos concluíram, na tarefa 1, a existência de quatro comprimentos diferentes. No entanto, alguns consideraram cinco comprimentos – facto associado às fragilidades supracitadas.

No decurso do processo exploratório, a maioria dos alunos, independentemente da estratégia privilegiada, considerou útil realizar as tarefas 1 e 2 em simultâneo, entendendo a segunda como um suporte à primeira. De facto, a tarefa 2 permitiu-lhes registarem, gradualmente, as conclusões que foram construindo relativamente aos diferentes comprimentos dos bissemis, o que facilitou a organização das suas ideias na tarefa 1. Consequentemente, as respostas dos alunos na tarefa 2 convergem com as da tarefa 1, mesmo ao nível das fragilidades identificadas.

Na tarefa 3, todos os alunos privilegiaram a utilização da medição. Isto é, mesmo os alunos que anteriormente tinham investigado os diferentes comprimentos dos bissemis por comparação direta, optaram, agora, por medir os comprimentos dos seus lados a fim de determinarem os bissemis isoperimétricos. Este facto sugere que os alunos, perante a ausência de medidas para os lados dos bissemis, não conceberam a possibilidade de comparação dos perímetros dos mesmos, pelo que recorreram à medição. Genericamente, todos os alunos identificaram "o perímetro de um polígono como a soma das medidas dos comprimentos dos lados, fixada uma unidade" ([7], p. 13). De facto, nas respostas da tarefa 3, todos os alunos adicionaram as medidas dos lados de cada um dos bissemis para determinarem o seu perímetro. De notar que os alunos não indicaram qualquer fórmula no cálculo do perímetro.

Ainda que o procedimento utilizado na tarefa 3 tenha sido transversal à totalidade dos alunos, o mesmo não aconteceu com os resultados. Por um lado, estes foram determinados pelas discrepâncias na leitura da escala da régua, aquando da medição dos comprimentos. Neste âmbito, verificou-se uma tendência geral para a leitura incorreta de uma das quatro medidas dos lados dos bissemis ($\sqrt{125} \approx 11,18\ cm$), que foi apresentada como um número inteiro ($11\ cm$). Ora, apenas um grupo muito restrito de alunos revelou maior rigor na leitura do instrumento, registando as medidas $11,2\ cm$ ou $11,3\ cm$. Por outro lado, também as fragilidades anteriormente identificadas concorreram para a disparidade dos resultados nesta tarefa, pois os alunos calcularam o perímetro dos bissemis com base nas medidas já determinadas, muitas delas com incorreções.

Na tarefa 4, a maioria dos alunos considerou a existência de figuras com a mesma área e perímetros diferentes, reconhecendo validade à opinião do Afonso: "Os bissemis são figuras com a mesma área (figuras equivalentes) e que podem ter perímetros diferentes". Em contrapartida, alguns alunos corroboraram a ideia da Matilde: "Acho que não! Não pode haver figuras com a mesma área e perímetros diferentes!". Relativamente aos exemplos dos alunos que concordaram com o Afonso, grande parte apresentou dois bissemis com perímetros diferentes (Figura 15), apontando um exemplo concordante com a opinião que validam. Destes alunos, alguns fizeram ainda alusão à equivalência dos bissemis, traduzindo a área dos mesmos pela medida "dois triângulos" (Figura 16). Um aluno seguiu esta linha de pensamento, apresentando três bissemis com perímetros diferentes, no entanto, decompô-los, não em dois triângulos, mas em cinco triângulos (Figura 17), revelando confusão neste domínio. Outros alunos apresentaram dois exemplos de bissemis com o mesmo perímetro (Figura 18), fornecendo um exemplo contraditório à situação. E, um aluno, em vez de um exemplo, registou uma justificação verbal errónea: "Os bissemis têm que ter o perímetro diferente porque eles não são iguais".

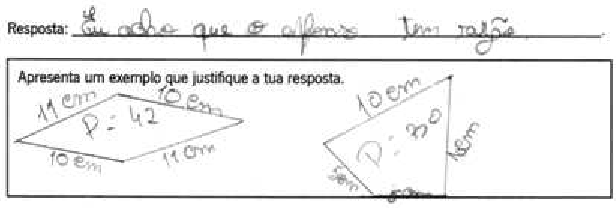

Figura 15: Resolução efetuada por um aluno (IM) na exploração da tarefa 4.

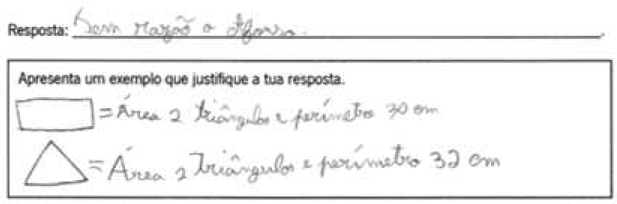

Figura 16: Resolução efetuada por um aluno (CF) na exploração da tarefa 4.

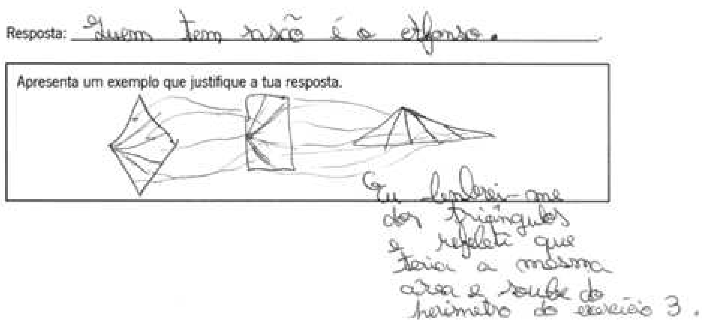

Figura 17: Resolução efetuada por um aluno (MP) na exploração da tarefa 4.

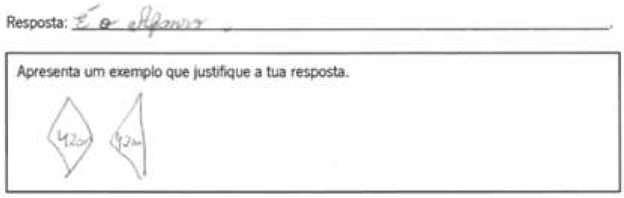

Figura 18: Resolução efetuada por um aluno (DF) na exploração da tarefa 4.

Quanto aos exemplos dos alunos que concordaram com a opinião da Matilde, alguns apresentaram dois bissemis com o mesmo perímetro (Figura 19), sugerindo um exemplo concordante com a opinião que corroboram, mas não extensível à generalidade. E, outros não apresentaram qualquer exemplo, registando: "não pode haver figuras com a mesma área e perímetros diferentes".

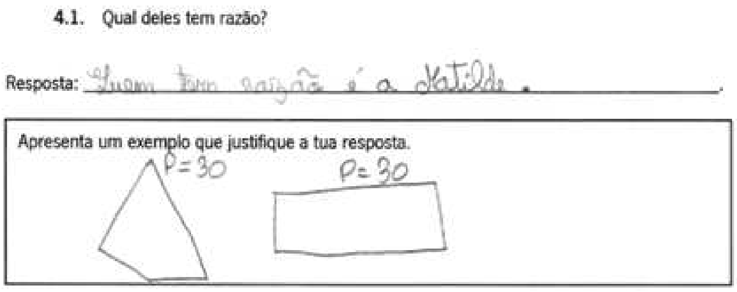

Figura 19: Resolução efetuada por um aluno (BB) na exploração da tarefa 4.

As respostas anteriores sugerem que a maioria dos alunos reconheceu que figuras com a mesma área, como são os bissemis, podem ter ou não o mesmo perímetro. Contudo, alguns alunos explanaram a ideia de impossibilidade de existirem figuras com a mesma área e perímetros diferentes. De facto, mesmo depois da exploração desenvolvida, estes parecem manter fixas as suas conceções, resistindo às evidências que os bissemis tão bem ilustram.

Mais de metade dos alunos da turma explorou, ainda, a tarefa 5. Em traços gerais, todos conseguiram construir pelo menos uma figura não geometricamente igual a um dos bissemis à sua escolha mas com o mesmo perímetro. Destes alunos, alguns, para além do bissemi escolhido, desenharam apenas o bissemi com o mesmo perímetro do que este (Figura 20); outros alargaram o número de figuras com o mesmo perímetro, porém, cingiram-se às formas retangulares (Figura 21); e um pequeno número de alunos apresentou um conjunto mais variado de figuras com o mesmo perímetro, incluindo polígonos irregulares (Figura 22).

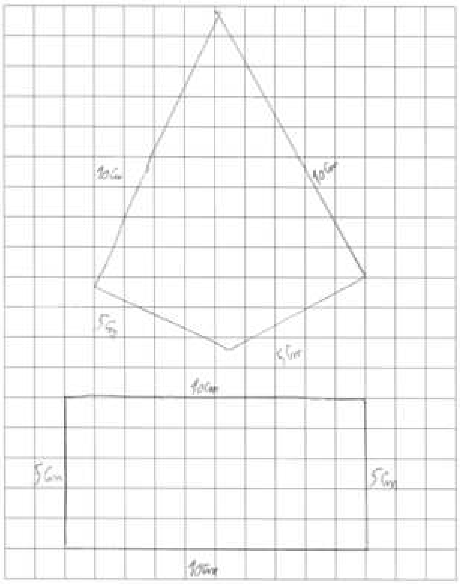

Figura 20: Resolução efetuada por um aluno (DS) na exploração da tarefa 5.

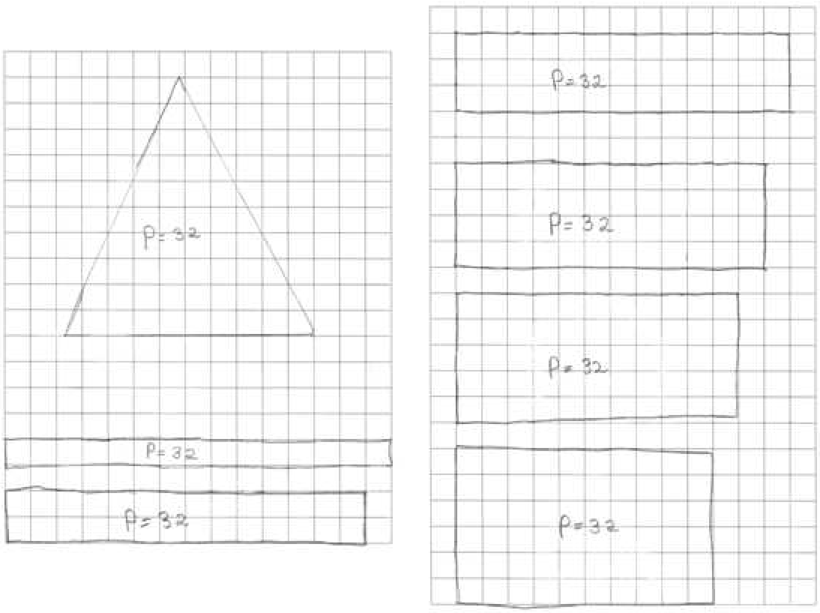

Figura 21: Resolução efetuada por um aluno (JR) na exploração da tarefa 5.

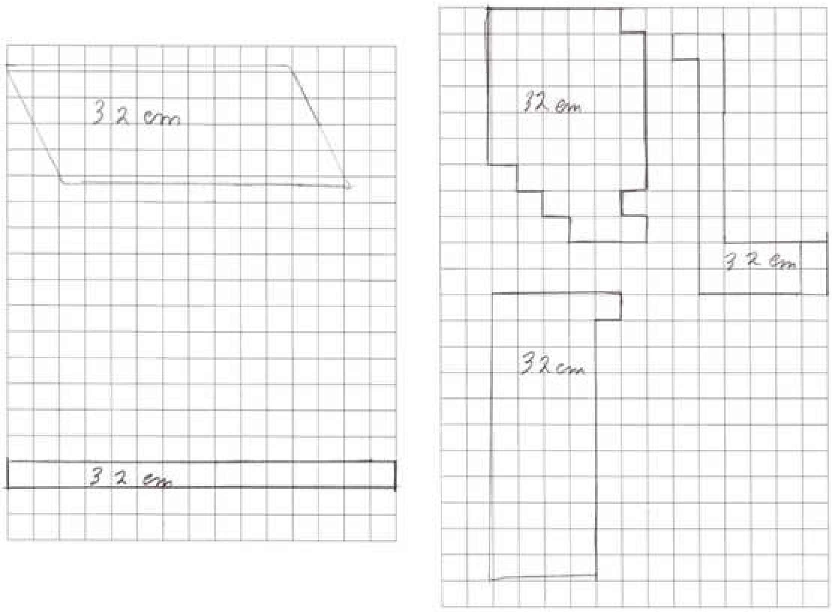

Figura 22: Resolução efetuada por um aluno (RP) na exploração da tarefa 5.

Findo o tempo definido para a realização da ficha, promoveu-se um momento de discussão/reflexão em plenário acerca da mesma. Na tarefa 1, os alunos apresentaram uma das duas estratégias utilizadas, concluindo a existência de quatro ou cinco comprimentos diferentes. Esta diferença nas respostas intensificou o debate de ideias.

Enquanto suporte para esta discussão, colaram-se, no quadro de giz, os bissemis feitos em cartolina, nos quais estavam marcados os dois triângulos que os compõem. A seguir, solicitou-se aos alunos que privilegiaram a estratégia de medição que expusessem as medidas determinadas para os lados dos bissemis, registando-se no quadro de giz. Depois, desafiaram-se os alunos compararem diretamente (com os seus bissemis) alguns dos lados considerados diferentes. Nesta altura, tornou-se evidente que determinados alunos questionaram a validade das suas ideias, assumindo algumas incorreções.

Posteriormente, focalizou-se a atenção dos alunos na congruência de lados entre os bissemis, o que permitiu sustentar e aprofundar as conclusões anteriores. A par disto, foram, também, debatidas as diferentes medidas determinadas para os lados dos bissemis. Neste âmbito, tornou-se consensual a consideração de três medidas de valor inteiro (5 cm, 10 cm, 20 cm) e de uma medida de valor aproximado ($11,2$ cm). Em virtude do aprofundamento e da abrangência subjacentes à discussão da tarefa 1, as restantes tarefas foram corrigidas com maior celeridade, não se identificando constrangimentos.

4 Reflexão final

Tendo por base o objetivo subjacente à primeira intervenção, importa relevar que as oportunidades concedidas aos alunos para compararem a área de diferentes figuras se constituíram fundamentais, pois permitiram focar a atenção dos mesmos na compreensão do próprio atributo área. Segundo Van de Walle [11], "when students compare objects on the basis of some measurable attribute, that attribute becomes the focus of the activity." (p. 312). Neste âmbito, os bissemis revelaram-se um material potencial, que facilitou a compreensão e a representação do conceito matemático área e que envolveu os alunos, não só por não o conhecerem, como também porque foi construído por eles e não introduzido como algo já feito.

Atendendo ao objetivo subjacente à segunda intervenção, interessa acentuar que as experiências de aprendizagem pensadas para os alunos medirem diretamente a área de puzzles por meio da repetição de diferentes unidades de medida se constituíram essenciais, no sentido em que permitiram focar a atenção dos mesmos na compreensão do atributo área e, sobretudo, no próprio processo de medição deste atributo, ausente de procedimentos numéricos rotineiros. A opção pela continuidade na utilização do material revelou-se, por um lado, estruturante para os alunos e, por outro lado, permitiu acentuar as potencialidades do mesmo para o prosseguimento da exploração do conteúdo área, em particular na concretização da medição direta da área.

Considerando o objetivo subjacente à terceira intervenção, é importante salientar que as atividades desenvolvidas pelos alunos, tendentes à distinção entre os conceitos de área e perímetro, constituíram-se importantes, no sentido em que permitiram responder a um erro amplamente documentado pela literatura e evidenciado por vários alunos da turma. Neste domínio, os bissemis, pelas suas características (todos equivalentes e alguns com perímetro distinto), constituíram-se um material importante para auxiliar as explorações dos alunos, possibilitando situações de aprendizagem ativas e com sucesso.

No final, realizou-se uma sistematização geral acerca de todo o trabalho desenvolvido com os bissemis, retomando, em interação com a turma, as atividades desenvolvidas pelos alunos ao longo das três aulas precedentes, bem como os principais conteúdos explorados.

Na verdade, o material permitiu contornar as dificuldades experimentadas pelos alunos ao longo das aulas, facilitando a compreensão dos conteúdos.

Referências

[1] Battista, M. "The development of geometric and spatial thinking", in F. K. Lester, Jr. (Ed.), *Second Handbook of Research in Mathematics Teaching and Learning: a project of the national council of teachers of mathematics*, 2, 843-908, Charlotte, NC: Information Age Publishing, 2007.

[2] Ferreira, D., Sousa, F. "A Medida" in A. Gomes (Coord.), *MAT 1C: desafio à matemática*, 133-142, Braga: Universidade do Minho - Instituto de Estudos da Criança, 2007.

[3] Gerdes, P. *Sobre o despertar do pensamento geométrico*, Curitiba, PR: Editora da Universidade Federal do Paraná, 1991.

[4] Gerdes, P. *Desenhos da África*, São Paulo, SP: Editora Scipione, 1997.

[5] Gerdes, P. *Jogo dos Bisos - Puzzles e divertimentos*, Maputo, Moçambique: Editora Girafa, 2008.

[6] Gerdes, P. *Jogo de bissemis - mais de cem puzzles*, Morrisville, NC: LULU, 2008.

[7] Ministério da Educação e Ciência. *Metas Curriculares de Matemática do Ensino Básico*, Lisboa: Ministério da Educação e Ciência, 2012.

[8] National Council of Teachers of Mathematics. *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*, Lisboa: Associação de Professores de Matemática, 2007.

[9] Outhred, L., Mitchelmore, M. "Young Children's Intuitive Understanding of Rectangular Area Measurement", Journal for Research in Mathematics Education, 31 (2), 144-167, 2000.

[10] Ralha, E., Gomes, A. "A Medida", in P. Palhares (Coord.), Elementos de Matemática para Professores do Ensino Básico, 375-405, Lisboa: Lidel, 2004.

[11] Van de Walle, J. *Elementary and Middle School Mathematics: teaching developmentally* (3rd ed.), New York: Longman, 1998.